PART2　桁数と小数首位

例題

$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

(1)　2^{50} は何桁の整数か。

(2)　$\left(\dfrac{1}{8}\right)^{30}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

Point Pickup

練習

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1)　6^{30} は何桁の整数か。

(2)　$\left(\dfrac{2}{5}\right)^{30}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

第 13 講　PART2 確認問題

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

1　6^{50} は何桁の整数か。

アイ 桁

2　$\left(\dfrac{4}{5}\right)^{40}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

小数第 ウ 位

PART2　桁数と小数首位

例題

$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

(1)　2^{50} は何桁の整数か。

(2)　$\left(\frac{1}{8}\right)^{30}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

(1)　2^{50} の常用対数をとると

$$\log_{10} 2^{50} = 50\log_{10} 2 = 50 \times 0.3010 = 15.05$$

よって　$15 < \log_{10} 2^{50} < 16$　より　$10^{15} < 2^{50} < 10^{16}$

したがって，2^{50} は 16 桁の整数である。

(2)　$\left(\frac{1}{8}\right)^{30}$ の常用対数をとると

$$\log_{10}\left(\frac{1}{8}\right)^{30} = 30\log_{10} 2^{-3} = -90\log_{10} 2 = -90 \times 0.3010 = -27.09$$

よって　$-28 < \log_{10}\left(\frac{1}{8}\right)^{30} < -27$　より　$10^{-28} < \left(\frac{1}{8}\right)^{30} < 10^{-27}$

したがって，$\left(\frac{1}{8}\right)^{30}$ は小数第 28 位に初めて 0 でない数字が現れる。

練習

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1)　6^{30} は何桁の整数か。

(2)　$\left(\dfrac{2}{5}\right)^{30}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

(1)　6^{30} の常用対数をとると

$$\log_{10} 6^{30} = 30\log_{10}(2\times3) = 30(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = 30(0.3010 + 0.4771) = 23.343$$

よって　$23 < \log_{10} 6^{30} < 24$　より　$10^{23} < 6^{30} < 10^{24}$

したがって，6^{30} は 24 桁の整数である。

(2)　$\left(\dfrac{2}{5}\right)^{30}$ の常用対数をとると

$$\log_{10}\left(\frac{2}{5}\right)^{30} = 30\log_{10}\frac{4}{10} = 30(2\log_{10} 2 - \log_{10} 10)$$

$$= 30\times(2\times0.3010 - 1) = -11.94$$

よって　$-12 < \log_{10}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{30} < -11$　より　$10^{-12} < \left(\dfrac{2}{5}\right)^{30} < 10^{-11}$

したがって，$\left(\dfrac{2}{5}\right)^{30}$ は小数第 12 位に初めて 0 でない数字が現れる。

第13講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** アイ：39

[解説]

6^{50} の常用対数をとると **[A]**

$$\log_{10} 6^{50} = 50\log_{10}(2\times3)$$
$$= 50(\log_{10}2+\log_{10}3)$$
$$= 50\times(0.3010+0.4771)$$
$$= 38.905$$

よって　$38 < \log_{10} 6^{50} < 39$ より

$$10^{38} < 6^{50} < 10^{39}$$

したがって，6^{50} は **39 桁**の整数である。

> [A]　正の数 N の整数部分の桁数を求める手順
> ①　N の常用対数をとり，$\log_{10} N$ の値を求める。
> ②　$n-1 \leqq \log_{10} N < n$ を満たす整数 n を求める。
> ③　$10^{n-1} \leqq N < 10^n$ の形で表す。
> ④　正の数 N の整数部分は n 桁である。

2　**[正解]** ウ：4

[解説]

$\left(\dfrac{4}{5}\right)^{40}$ の常用対数をとると **[B]**

$$\log_{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{40} = 40\log_{10}\frac{8}{10}$$
$$= 40(3\log_{10}2-\log_{10}10)$$
$$= 40\times(3\times0.3010-1)$$
$$= -3.88$$

よって　$-4 < \log_{10}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{40} < -3$ より

$$10^{-4} < \left(\frac{4}{5}\right)^{40} < 10^{-3}$$

したがって，$\left(\dfrac{4}{5}\right)^{40}$ は**小数第 4 位**に初めて 0 でない数字が現れる。

> [B]　正の数 N は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるかを求める手順
> ①　N の常用対数をとり，$\log_{10} N$ の値を求める。
> ②　$-n \leqq \log_{10} N < -n+1$ を満たす整数 n を求める。
> ③　$10^{-n} \leqq N < 10^{-n+1}$ の形で表す。
> ④　正の数 N は小数第 n 位に初めて 0 でない数字が現れる。